MNOŽENJE MATRICA

Množenje dvije matrice je dobro definisano samo ako je broj kolona lijeve matrice jednak broju vrsta desne matrice. Ako je A matrica dimenzija *m*-sa-*n*, a B je matrica dimenzija *n*-sa-*p*, tada je njihov **proizvod** AB matrica dimenzija *m*-sa-*p* dat formulom:

$$(AB)[i,j] = A[i,1]B[1,j] + A[i,2]B[2,j] + \ldots + A[i,n]B[n,j]$$

za svaki par i i j.

Na primjer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\cdot 3 + 0\cdot 2 + 2\cdot 1) & (1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0) \\ ((-1)\cdot 3 + 3\cdot 2 + 1\cdot 1) & ((-1)\cdot 1 + 3\cdot 1 + 1\cdot 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Množenje matrica ima sljedeće osobine:

- $(AB)C = A(BC)$ za sve *k*-sa-*m* matrice A, *m*-sa-*n* matrice B i *n*-sa-*p* matrice C (asocijativnost).
- $(A+B)C = AC + BC$ za sve *m*-sa-*n* matrice A i B i *n*-sa-*k* matrice C (desna distributivnost).
- $C(A+B) = CA + CB$ za sve *m*-sa-*n* matrice A i B i *k*-sa-*m* matrice C (lijeva distributivnost).
- $m(AB) = (mA)B$
- $A(mB) = m(AB)$

Komutativnost ne vrijedi u opštem slučaju ako su date matrice A i B, ako su oba faktora definisana, u opštem slučaju je .

$$AB \neq BA$$

Stepenovanje matrica

$$AA = A^2$$

$$AAA = A^3$$

$$\underbrace{AA\cdots A}_{n} = A^n$$

Po definiciji je

$$A^0 = I$$

Primjeri:

1.

Za dati polinom $P(x) = x^2 + 2$ i matricu $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ izračunati $P(A)$.

Rešenje:

Kako je $P(A) = A^2 + 2$, nadjimo najpre matricu A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 3 + 0\cdot 2 + 2\cdot 1 & 3\cdot 0 + 0\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 3\cdot 2 + 0\cdot 4 + 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 + 1\cdot 2 + 4\cdot 1 & 2\cdot 0 + 1\cdot 1 + 4\cdot(-1) & 2\cdot 2 + 1\cdot 4 + 4\cdot 0 \\ 1\cdot 3 + (-1)\cdot 2 + 0\cdot 1 & 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot(-1) & 1\cdot 2 + (-1)\cdot 4 + 0\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9+0+2 & 0+0-2 & 6+0+0 \\ 6+2+4 & 0+1-4 & 4+4+0 \\ 3-2+0 & 0-1+0 & 2-4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 6 \\ 12 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Sad ovo menjamo u $P(A) = A^2 + 2$, ali pazimo da uz 2 obavezno dodamo jediničnu matricu I, naravno trećeg reda.

Dakle $P(A) = A^2 + 2 \cdot I$

$$P(A) = A^2 + 2\cdot I = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 6 \\ 12 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} + 2\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 6 \\ 12 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 & 6 \\ 12 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.

. Ako su date matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, izračunati:

a) $A \cdot B = ?$

b) $B \cdot A = ?$

3.

Izračunati **ABC** ako su:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.

. Za dati polinom $P(x) = x^2 - 5x + 3$ i matricu $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ odredi $P(A)$.